This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math
8588
46

Math 8588.45

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

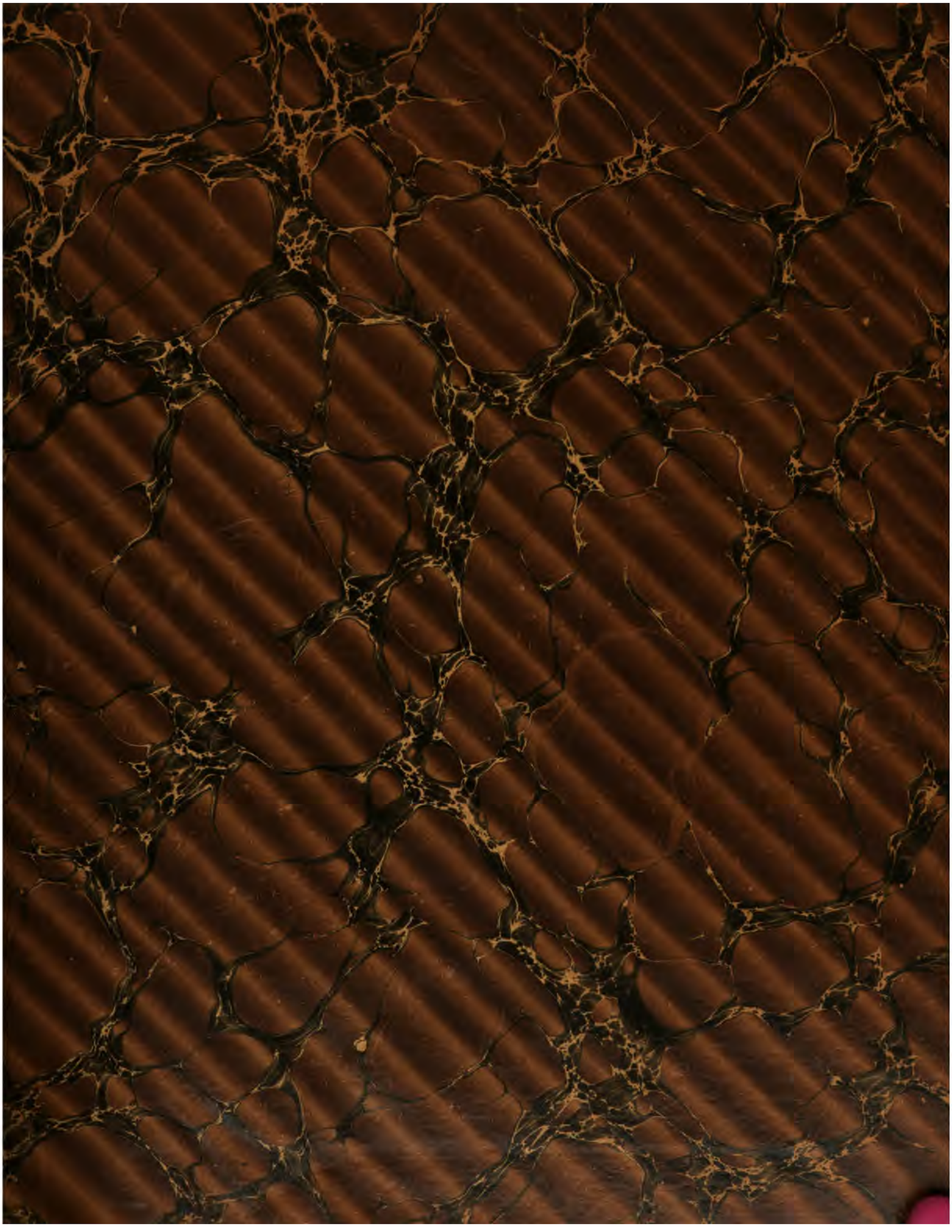

TABLEAU DE FORMULES

DE LA THÉORIE

DES COURBES DANS L'ESPACE,

PAR M. DE SAINT-VENANT,

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Membre de la Société Philomatique.

Extrait d'un Mémoire sur ces Courbes, inséré dans le Journal de l'École royale Polytechnique, XXXe Cahier.

Prix : 1 franc.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
De l'École Polytechnique,
Quai des Augustins, n° 55.

CARILIAN-GŒURY ET Vve DALMONT,
Libraires,
Quai des Augustins, nos 39 et 41.

1845

Math 9388.5

AUG 27 1901
LIBRARY

Haven fund

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

TABLEAU DE FORMULES

DE LA THÉORIE

DES COURBES DANS L'ESPACE.

Les calculs analytiques relatifs aux lignes courbes non planes, ainsi qu'aux surfaces qui ont avec elles des rapports intimes, se présentent ordinairement avec une très-grande complication, et plusieurs auteurs semblent avoir reculé devant leur développement.

Mais ils deviennent praticables et faciles, *même dans le cas général où l'on fait varier la différentielle de l'arc comme celles des trois coordonnées,* en faisant un certain choix de notations abréviatives qui répondent géométriquement à quelque chose, et en dressant d'avance un tableau de formules de transformation et de réduction, que l'on garde sous les yeux pour y avoir souvent recours.

Voici un tableau de ce genre. J'ai été dans le cas de faire usage de presque toutes ses formules, en m'occupant soit de la théorie géométrique des courbes, soit de la théorie statique de la flexion et de la torsion des verges élastiques (*). On peut y voir qu'en laissant la différentielle ds de l'arc en dénominateur sous celles des coordonnées, on rend les calculs presque aussi simples lorsqu'on la suppose variable que lorsqu'on la suppose constante.

Soient

x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point M d'une ligne courbe (les demi-axes positifs des x, y, z étant disposés comme à l'ordinaire, de manière qu'en se plaçant à l'origine, dans l'intérieur de leur angle trièdre, on voie y à gauche de z, z à gauche de x, x à gauche de y);

$x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ celles d'un point M′ infiniment voisin pris sur la même courbe;

$x + 2dx + d^2x$, $y + 2dy + d^2y$, $z + 2dz + d^2z$ celles d'un autre point M″ de la courbe, placé de l'autre côté de M′ par rapport à M, et dont la distance à M′ ne diffère de celle de M′ à M que d'un infiniment petit du second ordre;

etc.

(*) C'est, par exemple, pour transformer un résultat de Mécanique qu'il m'a fallu établir les expressions nouvelles (s'') du carré de la courbure.

ds l'élément MM′, *regardé comme toujours positif*, de l'arc de la courbe.

$ds + d^2s$ l'élément M′M″, plus grand ou plus petit que MM′, en sorte que d^2s peut être positif ou négatif; etc.

$\frac{1}{\rho}$ *la courbure*, ou ρ le rayon de courbure *toujours positif*, en M; ou soit $\frac{ds}{\rho}$ l'angle des deux demi-tangentes à la courbe, menées l'une en M vers M′, l'autre en M′ vers M″.

(Et, par conséquent, $\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}$, $\frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds}$, $\frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds}$ les cosinus des angles que fait le rayon de courbure, mené de M au centre de courbure, avec les demi-axes positifs des x, y, z.)

X, Y, Z les aires des projections, sur les trois plans coordonnés yz, zx, xz, du parallélogramme infinitésimal formé sur les deux éléments consécutifs MM′, M′M″, parallélogramme dont la superficie non projetée est $\frac{ds^3}{\rho}$.

(Et, par conséquent, $\frac{\rho X}{ds^3}$, $\frac{\rho Y}{ds^3}$, $\frac{\rho Z}{ds^3}$ les cosinus des angles faits avec les plans coordonnés yz, zx, xy par le *plan osculateur*, qui est celui de ce petit parallélogramme, ou faits avec les demi-axes positifs des x, y, z, par la *binormale* (*), qui est la perpendiculaire au plan osculateur, *supposée élevée, au point* M, *du côté de ce plan où l'on voit la convexité de la courbe à gauche et sa concavité à droite de l'élément* MM′, *en se plaçant sur le plan, les pieds en* M.)

$\frac{1}{\iota}$ la *cambrure* (**), ou ι le *rayon de cambrure* de la courbe en M; ou soit $\frac{ds}{\iota}$ l'angle des deux plans osculateurs en M, M′; *angle positif, ainsi que* ι, *lorsqu'en s'adossant à la demi-tangente* MM′, *les pieds en* M, *et regardant les deux plans osculateurs du côté de la concavité de la courbe, on voit à sa gauche le plan en* M *et à sa droite le plan en* M′; angle négatif quand on voit, au contraire, le second plan à gauche du premier.

Ou, ce qui revient au même, SOIENT FAITS

$$(a) \qquad \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds \text{ (radical positif)},$$

$$(b) \qquad dyd^2z - dzd^2y = X, \quad dzd^2x - dxd^2z = Y, \quad dxd^2y - dyd^2x = Z,$$

$$(c) \qquad \frac{1}{ds^3}\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{1}{\rho} \text{ (radical positif)},$$

$$(d) \qquad \frac{Xd^3x + Yd^3y + Zd^3z}{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{1}{\iota}.$$

(*) Ligne normale à *deux* éléments consécutifs.

(**) On peut voir au Mémoire (Note I, à la fin) les raisons pour lesquelles on rejette les dénominations de *flexion* et de *torsion*, qui peuvent tromper dans les applications à la Mécanique, et l'on ne se sert pas non plus de celle de *seconde courbure*.

Soient faits encore

$$(e)\qquad d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y = X',\quad d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z = Y',\quad d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x = Z';$$

$$(f)\qquad \begin{cases} d\dfrac{dy}{ds}\,d^2\dfrac{dz}{ds} - d\dfrac{dz}{ds}\,d^2\dfrac{dy}{ds} = X'_s, \quad d\dfrac{dz}{ds}\,d^2\dfrac{dx}{ds} - d\dfrac{dx}{ds}\,d^2\dfrac{dz}{ds} = Y'_s, \\ d\dfrac{dx}{ds}\,d^2\dfrac{dy}{ds} - d\dfrac{dy}{ds}\,d^2\dfrac{dz}{ds} = Z'_s. \end{cases}$$

On en tire les formules suivantes, *dont les preuves analytiques sont données au bas des pages quand elles ne sont pas indiquées dans le tableau même* (*) (celles qui servent le plus souvent sont désignées par une lettre plus grosse) :

$$(g)\qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$(h)\qquad \frac{dx}{ds}\,d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d\frac{dz}{ds} = 0, \qquad \text{(résulte de la différentiation de } g\text{)},$$

$$(i)\qquad dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds\,d^2s, \qquad \text{(résulte de la différentiation de } a\text{)},$$

$$(j)\qquad d\frac{dx}{ds} = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2},\quad d\frac{dy}{ds} = \frac{ds\,d^2y - dy\,d^2s}{ds^2},\quad d\frac{dz}{ds} = \frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{ds^2},$$

$$(k)\qquad \frac{dy}{ds}\,d\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds}\,d\frac{dy}{ds} = \frac{X}{ds^2},\quad \frac{dz}{ds}\,d\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d\frac{dz}{ds} = \frac{Y}{ds^2},\quad \frac{dx}{ds}\,d\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\,d\frac{dx}{ds} = \frac{Z}{ds^2},$$

$$(k\ bis)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{ds}\,d^2\dfrac{dz}{ds} - \dfrac{dz}{ds}\,d^2\dfrac{dy}{ds} = d\cdot\dfrac{X}{ds^2}, \quad \dfrac{dz}{ds}\,d^2\dfrac{dx}{ds} - \dfrac{dx}{ds}\,d^2\dfrac{dz}{ds} = d\cdot\dfrac{Y}{ds^2}, \\ \dfrac{dx}{ds}\,d^2\dfrac{dy}{ds} - \dfrac{dy}{ds}\,d^2\dfrac{dx}{ds} = d\cdot\dfrac{Z}{ds^2}. \end{cases}$$

(Les formules (o'') ci-après en donnent d'autres expressions) :

$$(l)\qquad d^2\frac{dx}{ds} = \frac{ds\,d^3x - dx\,d^3s}{ds^2} - \frac{2d^2s}{ds}\,d\frac{dx}{ds},\quad d^2\frac{dy}{ds} = \ldots,\quad d^2\frac{dz}{ds} = \ldots, \qquad (\textit{voyez } u'' \text{ ci-après.})$$

$$(m)\qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{ds^6}{\rho^2},$$

$$(n)\qquad d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2 = \frac{ds^4}{\rho^2}, \qquad (n^*),$$

$$(o)\qquad \left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2 = \frac{ds^2}{\rho^2}, \qquad (o^*),$$

(*) On trouve, au *Mémoire* (Note II, à la fin), des démonstrations et interprétations géométriques de plusieurs d'entre elles.

(n^*) L'équation (n) résulte du développement de (m). En effet,

$$X^2+Y^2+Z^2 = (dy^2+ds^2)\,d^2x^2 + (ds^2+dx^2)\,d^2y^2 + (dx^2+dy^2)\,d^2z^2 - 2dy\,ds\,d^2y\,d^2z - 2ds\,dx\,d^2z\,d^2x - 2dx\,dy\,d^2x\,d^2y$$
$$= (dx^2+dy^2+dz^2)(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2) - (dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)^2,$$

ce qui, au moyen de (a) et de (i), devient $ds^2\,(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2)$.

(o^*) En effet, au moyen de (j), on a

$$\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + d\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2 = \frac{1}{ds^4}\left[(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2 + (ds\,d^2y - dy\,d^2s)^2 + (ds\,d^2z - dz\,d^2s)^2\right]$$
$$= \frac{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}{ds^2} + \frac{d^2s^2}{ds^2} - 2\,\frac{ds\,d^2s\,(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)}{ds^4} = \frac{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2}{ds^2},$$

ce qui, au moyen de (n), se réduit à $\dfrac{ds^2}{\rho^2}$.

(p) $$dX = dyd^2z - dzd^2y, \quad dY = dzd^2x - dxd^2z, \quad dZ = dxd^2y - dyd^2x,$$

(q) $$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \quad Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z = 0, \quad Xd\frac{dx}{ds} + Yd\frac{dy}{ds} + Zd\frac{dz}{ds} = 0,$$

(r) $$\begin{cases} X'd^2x + Y'd^2y + Z'd^2z = 0, & X'd^3x + Y'd^3y + Z'd^3z = 0, \\ dXdx + dYdy + dZdz = 0, & dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z = 0, \end{cases}$$

(s) $$X'_s\, d\frac{dx}{ds} + Y'_s\, d\frac{dy}{ds} + Z'_s\, d\frac{dz}{ds} = 0, \quad X'_s d^2\frac{dx}{ds} + Y'_s d^2\frac{dy}{ds} + Z'_s d^2\frac{dz}{ds} = 0,$$

(t) $$dxd^3x + dyd^3y + dzd^3z = dsd^3s - \frac{ds^4}{\rho^2}, \qquad (t^*),$$

(u) $$d^2xd^3x + d^2yd^3y + d^2zd^3z = d^2sd^3s + \frac{ds^2}{\rho}d\frac{ds^2}{\rho}, \qquad \text{(résulte de la différentiation de } u\text{)},$$

(v) $$\frac{dx}{ds}d^2\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d^2\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d^2\frac{dz}{ds} = -\frac{ds^2}{\rho^2}, \qquad \text{(résulte de } h \text{ et } o\text{)},$$

(x) $$d^2xd\frac{dx}{dz} + d^2yd\frac{dy}{ds} + d^2zd\frac{dz}{ds} = \frac{ds^3}{\rho^2}, \qquad \text{(résulte de } j, i, n\text{)},$$

(y) $$d^2xd^2\frac{dx}{ds} + d^2yd^2\frac{dy}{ds} + d^2zd^2\frac{dz}{ds} = \frac{ds^3}{\rho}d\frac{1}{\rho}, \qquad (y^*),$$

(z) $$d\frac{dx}{ds}d^2\frac{dx}{ds} + d\frac{dy}{ds}d^2\frac{dy}{dz} + d\frac{dz}{ds}d^2\frac{dz}{ds} = \frac{ds}{\rho}d\frac{ds}{\rho}, \qquad \text{(résulte de la différentiation de } o\text{)},$$

(a') $$Ydz - Zdy = ds^3d\frac{dx}{ds}, \quad Zdx - Xdz = ds^3d\frac{dy}{dz}, \quad Xdy - Ydx = ds^3d\frac{dz}{ds}, \qquad (a'^*),$$

(b') $$Yd^2z - Zd^2y = ds^3d^2sd\frac{dx}{ds} - \frac{ds^4}{\rho^2}dx \text{ (et deux autres équations semblables)}, \qquad (b'^*),$$

(c') $$Yd\frac{dz}{ds} - Zd\frac{dy}{ds} = -\frac{ds^3}{\rho^2}dx, \quad Zd\frac{dx}{ds} - Xd\frac{dz}{ds} = -\frac{ds^3}{\rho^2}dy, \quad Xd\frac{dy}{ds} - Yd\frac{dx}{ds} = -\frac{ds^3}{\rho^2}dz, \qquad (c'^*),$$

(d') $$Yd^2\frac{dz}{ds} - Zd^2\frac{dy}{ds} = -\frac{ds^3}{\rho}d\frac{dx}{\rho} \text{ (et deux autres semblables)}, \qquad (d'^*),$$

(e') $$dYdz - dZdy = ds(dsd^2x - dxd^2s) + \frac{dxds^4}{\rho^2} = dsd\left(ds^2d\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dxds^4}{\rho^2} \text{ (et deux autres semblables)} \qquad (e'^*),$$

$(e'\ bis)$ $$dYdz - dZdy = \rho \cdot d\frac{ds^2}{\rho} \cdot d\frac{dx}{ds} + \frac{Xds^2}{\nu}$$ (et deux autres semblables, tirées de e'' ci-après et de a', k)

(t^*) Résulte de la différentiation de (i), en ayant égard à (n).

(y^*) Résulte de (l), (i), (t), (x), et de ce que $\frac{ds}{\rho}\left(d\frac{ds^2}{\rho} - \frac{2dsd^2s}{\rho}\right) = \frac{ds^3}{\rho}d\frac{1}{\rho}$.

(a'^*) Car $$Ydz - Zdy = (dsd^2x - dxd^2s)\,ds - (dxd^2y - dyd^2x)\,dy = d^2x\,(dy^2 + ds^2) - dx\,(dyd^2y + dsd^2s)$$
$$= d^2x\,(dx^2 + dy^2 + ds^2) - dx\,(dxd^2x + dyd^2y + dsd^2s) = ds^2d^2x - dxdsd^2s.$$

(b'^*) Car $$Yd^2z - Zd^2y = d^2x\,(dxd^2x + dyd^2y + dsd^2s) - dx\,(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2s^2) = dsd^2sd^2x - dx\left(\frac{ds^4}{\rho^2} + d^2s^2\right).$$

(c'^*) Car $$Yd\frac{dz}{ds} - Zd\frac{dy}{ds} = d^2x\left(dxd\frac{dx}{dy} + dyd\frac{dy}{ds} + dsd\frac{ds}{ds}\right) - dx\left(d^2xd\frac{dx}{ds} + d^2yd\frac{dy}{ds} + d^2sd\frac{ds}{ds}\right).$$

La première partie s'anéantit au moyen de (h), et la seconde, au moyen de (x), se réduit à $-\frac{ds^3}{\rho^2}dx$.

(d'^*) Car $$Yd^2\frac{ds}{ds} - Zd^2\frac{dy}{ds} = d^2x\left(dxd^2\frac{dx}{ds} + dyd^2\frac{dy}{ds} + dsd^2\frac{ds}{ds}\right) - dx\left(d^2xd^2\frac{dx}{ds} + d^2yd^2\frac{dy}{ds} + d^2sd^2\frac{ds}{ds}\right),$$

qui, moyennant (v) et (y), se réduit à $-d^2x\frac{ds^3}{\rho^2} - dx\frac{ds^3}{\rho}d\frac{1}{\rho} = -\frac{ds^3}{\rho}d\frac{dx}{\rho}$.

(e'^*) Car $$dYdz - dZdy = d^2x\,(dx^2 + dy^2 + ds^2) - dx\,(dxd^2x + dyd^2y + dsd^2s) = d^2xds^2 - dx\left(dsd^2s - \frac{ds^4}{\rho^2}\right).$$

$$(e'\ ter)\qquad d\frac{Y}{ds^2}\cdot\frac{dz}{ds}-d\frac{Z}{ds^2}\cdot\frac{dy}{ds}=d^2\frac{dx}{ds}+\frac{dx}{ds}\frac{ds^2}{\rho^2}\ \text{(et deux autres semblables)},\qquad (e'\ ter^*),$$

$$(f')\qquad Xd^2x+Yd^2y+Zd^2z=\frac{ds^6}{\rho^2\tau},\qquad \text{(résulte de } c,\ d),$$

$$(g')\qquad YdZ-ZdY=dx\frac{ds^6}{\rho^2\tau},\quad ZdX-XdZ=dy\frac{ds^6}{\rho^2\tau},\quad XdY-YdX=dz\frac{ds^6}{\rho^2\tau},\qquad (g'^*),$$

$$(h')\qquad YZ'-ZY'=d^2x\frac{ds^6}{\rho^2\tau}\ \text{(et deux autres semblables)},\qquad (h'^*),$$

$$(i')\quad\begin{cases} dxd^2yd^2z-dxd^2zd^2y+dyd^2zd^2x-dyd^2xd^2z+dzd^2xd^2y-dzd^2yd^2x\\ =Xd^3x-dXd^2x+X'dx=Yd^3y-dYd^2y+Y'dy=Zd^3z-dZd^2z+Z'dz\\ =X'dx+Y'dy+Z'dz=-(dXd^2x+dYd^2y+dZd^2z)=d^2Xdx+d^2Ydy+d^2Zdz\\ =Xd^3x+Yd^2y+Zd^3z=\dfrac{ds^6}{\rho^2\tau},\qquad \text{(résulte de } b,\ e,\ p),\end{cases}$$

$$(j')\quad Xd^3y-dXd^2y+X'dy=0,\quad Xd^3z-dXd^2z+X'dz=0\ \text{(et de même pour les quatre autres trinômes semblables) (de } id.),$$

$$(k')\quad\begin{cases} dsd^2yd^3z-dsd^2zd^3y+dyd^2zd^3s-dyd^2sd^3z+dzd^2sd^3y-dzd^2yd^3s\\ =Xd^3s-dXd^2s+X'ds=\dfrac{ds^3}{\rho^2}\left(X+\dfrac{dx\,ds^2}{\tau}\right)\ \text{(et deux équations semblables en Y et Z)},\end{cases}\qquad (k'^*),$$

$$(l')\qquad X'_s=\frac{1}{\rho^2}\left(X+\frac{dxds^2}{\tau}\right),\quad Y'_s=\frac{1}{\rho^2}\left(Y+\frac{dyds^2}{\tau}\right),\quad Z'_s=\frac{1}{\rho^2}\left(Z+\frac{dzds^2}{\tau}\right),\qquad (l'^*),$$

(e' *ter**) Car, en développant le premier membre au moyen de (k *bis*), on trouve

$$d^2\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx^2+dy^2+ds^2}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\left(\frac{dx}{ds}d^2\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d^2\frac{dy}{ds}+\frac{ds}{ds}d^2\frac{ds}{ds}\right),$$

expression qui se réduit, au moyen de (v), à celle qu'on a donnée.

(g'^*) Car $YdZ-ZdY=Y(dxd^2y-dyd^2x)-Z(dsd^2x-dxd^2s)=dx(Xd^2x+Yd^2y+Zd^2z)-d^2x(Xdx+Ydy+Zdz)$, qui se réduit à $dx\dfrac{ds^6}{\rho^2\tau}$ au moyen de (f'), (q).

(h'^*) Car $YZ'-ZY'=d^2x(Xd^2x+Yd^2y+Zd^2z)-d^2x(Xd^2x+Yd^2y+Zd^2z)$,

qui se réduit à $d^2x\dfrac{ds^6}{\rho^2\tau}$ au moyen de (f'), (q).

(k'^*) Car, d'après (a), (t), (i), on a

$$Xdsd^2s-dXdsd^2s+X'ds^3=X\left(\frac{ds^4}{\rho^2}+dxd^2x+dyd^2y+dsd^2z\right)-dX(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)+X'(dx^2+dy^2+ds^2),$$

expression qui se réduit à $\dfrac{Xds^4}{\rho^2}+dx\dfrac{ds^6}{\rho^2\tau}$, d'après ($i'$), ($j'$).

(l') Ces formules importantes se démontrent en remarquant que, d'après (f), (j), (l), (e), on a

$$X'_s=d\frac{dy}{ds}d^2\frac{dz}{ds}-\frac{dz}{ds}d^2\frac{dy}{ds}=\frac{1}{ds}\left(d^2z\frac{dy}{ds}-d^2yd\frac{dz}{ds}\right)+\frac{d^2s}{ds^2}\frac{X}{ds}=\frac{1}{ds^3}(Xd^2s-dXd^2s+X'ds),$$

ou bien encore que $X'_s\,ds^3=ds^2\left(d\dfrac{dy}{ds}d^2\dfrac{dz}{ds}-\dfrac{dz}{ds}d^2\dfrac{dy}{ds}\right)=ds^2\left(d\dfrac{dy}{ds}\right)^2d\dfrac{d\frac{dz}{ds}}{d\frac{dy}{ds}}=\dfrac{1}{ds}(dsd^2y-dyd^2s)^2d.\dfrac{dsd^2z-dzd^2s}{dsd^2y-dyd^2s}$

$$=\frac{1}{ds}[(dsd^2y-dyd^2s)(dsd^2z-dzd^2s)-(dsd^2z-dzd^2s)(dsd^2y-dyd^2s)]$$
$$=dsd^2yd^2z-dsd^2zd^2y+dyd^2zd^2s-dyd^2sd^2z+dzd^2sd^2y-dzd^2yd^2s,$$

en sorte que, d'après (k'), on a $X'_s=\dfrac{1}{\rho^2}\left(X+\dfrac{dx\,ds^2}{\tau}\right)$.

$$(m')\qquad X_s'^2+Y_s'^2+Z_s'^2=\frac{ds^6}{\rho^4}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)=\frac{ds^6}{\rho^6\tau^2}(\rho^2+\tau^2),$$

$$(n')\qquad X_s'\frac{dx}{ds}+Y_s'\frac{dy}{ds}+Z_s'\frac{dz}{ds}=\frac{ds^3}{\rho^2\tau},$$

$$(o')\qquad XX_s'+YY_s'+ZZ_s'=\frac{ds^6}{\rho^4},$$

(résultent de l', m, q),

$$(p')\quad Y_s'\frac{dz}{ds}-Z_s'\frac{dy}{ds}=\frac{ds^2}{\rho^2}d\frac{dx}{ds},\quad Z_s'\frac{dx}{ds}-X_s'\frac{dz}{ds}=\frac{ds^2}{\rho^2}d\frac{dy}{ds},\quad X_s'\frac{dy}{ds}-Y_s'\frac{dx}{ds}=\frac{ds^2}{\rho^2}d\frac{dz}{ds},$$

$$(q')\quad YZ_s'-ZY_s'=\frac{ds^5}{\rho^2\tau}d\frac{dx}{ds}\ \text{(et deux autres semblables)},$$

(résultent de l', a'),

$$(r')\qquad Y_s'd\frac{dz}{ds}-Z_s'd\frac{dy}{ds}=\frac{ds^3}{\rho^3}d\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}\ \text{(et deux autres semblables)},\qquad (r'^*),$$

$$(s')\quad d\cdot\frac{\rho X}{ds^3}=d\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=-\frac{\rho}{\tau}d\frac{dx}{ds},\quad d\frac{\rho Y}{ds^3}=-\frac{\rho}{\tau}d\frac{dy}{ds},\quad d\frac{\rho Z}{ds^3}=-\frac{\rho}{\tau}d\frac{dz}{ds},\qquad (s'^*),$$

$$(t')\quad \frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds}d\frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds}-\frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds}d\frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds}=\frac{\rho^2\tau}{ds^2}X_s'\ \text{(et deux autres analogues, s'obtiennent en développant)},$$

$$(u')\qquad d\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}=\frac{\rho X}{\tau ds^2}-\frac{dx}{\rho},\quad d\frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds}=\frac{\rho Y}{\tau ds^2}-\frac{dy}{\rho},\quad d\frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds}=\frac{\rho Z}{\tau ds^2}-\frac{dz}{\rho},\qquad (u'^*),$$

$$(u'\,bis)\quad d^2\frac{dx}{ds}=\frac{ds}{\rho}\left(\frac{\rho X}{\tau ds^2}-\frac{dx}{\rho}\right)+\frac{\rho}{ds}d\frac{ds}{\rho}\cdot d\frac{dx}{ds}\ \text{(et deux autres semblables, résultent de } u'\text{)},$$

$$(v')\qquad \left(d^2\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d^2\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d^2\frac{dz}{ds}\right)^2-\left(d\frac{ds}{\rho}\right)^2=\frac{ds^4}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right),\qquad (v'^*),$$

(r'^*) Car
$$Y_s'd\frac{ds}{ds}-Z_s'd\frac{dy}{ds}=d^2\frac{dx}{ds}\left[\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{ds}{ds}\right)^2\right]-d\frac{dx}{ds}\left(d\frac{dx}{ds}d^2\frac{dx}{ds}+d\frac{dy}{ds}d^2\frac{dy}{ds}+d\frac{dz}{ds}d^2\frac{ds}{ds}\right)$$
$$=d^2\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds^2}{\rho^2}-d\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{\rho}d\frac{ds}{\rho}=\frac{ds}{\rho}\frac{ds^2}{\rho^2}d\left(\frac{\rho}{ds}d\frac{dx}{ds}\right).$$

(s'^*) Car
$$d\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\frac{(X^2+Y^2+Z^2)\,dX-X\,(XdX+YdY+ZdZ)}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}=-[Y(XdY-YdX)-Z(ZdX-XdZ)]\frac{\rho^3}{ds^3},$$

expression qui se réduit, au moyen de (g'), à $-\frac{\rho}{\tau ds^3}(Ydz-Zdy)$, et, au moyen de (a'), à $-\frac{\rho}{\tau}d\frac{dx}{ds}$.

(u'^*) Car, d'après (r'), (l'), (c') et (k),

$$d\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}=\frac{\rho^3}{ds^3}\left(Y_s'd\frac{dz}{ds}-Z_s'd\frac{dy}{ds}\right)=\frac{\rho}{ds^3}\left(Yd\frac{dz}{ds}-Zd\frac{dy}{ds}\right)+\frac{\rho}{\tau ds}\left(dyd\frac{dz}{ds}-dzd\frac{dy}{ds}\right)=-\frac{\rho}{ds^3}\cdot\frac{ds^3}{\rho^3}dx+\frac{\rho}{\tau ds}\frac{X}{ds}.$$

(v'^*) On obtient cette équation en développant le premier membre $X_s'^2+Y_s'^2+Z_s'^2$ de (m'), comme nous avons développé $X^2+Y^2+Z^2$ pour obtenir la formule (n) à laquelle (v') est analogue On l'obtient encore en ajoutant les carrés des trois expressions $(u'\,bis)$.

$$(x')\qquad \left(d\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2+\left(d\frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2+\left(d\frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2=ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right),\qquad (x'^*),$$

$$(y')\qquad dX d\frac{dx}{ds}+dY d\frac{dy}{ds}+dZ d\frac{dz}{ds}=-\frac{ds^4}{\rho^2\tau};\qquad \text{(résulte de } j,\ i'),$$

$$(z')\qquad \frac{dx}{ds}d^3\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d^3\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}d^3\frac{dz}{ds}=-3\frac{ds}{\rho}d\frac{ds}{\rho}=-\frac{\rho}{ds}d\frac{ds^3}{\rho^3},\qquad \text{(de } v \text{ différentié et de } z),$$

$$(a'')\qquad \frac{X}{ds^2}d^2\frac{dx}{ds}+\frac{Y}{ds^2}d^2\frac{dy}{ds}+\frac{Z}{ds^2}d^2\frac{dz}{ds}=\frac{ds^3}{\rho^2\tau},\qquad \text{(de } l,\ q,\ f'),$$

$$(b'')\qquad dX d^2\frac{dx}{ds}+dY d^2\frac{dy}{ds}+dZ d^2\frac{dz}{ds}=2d^2s\frac{ds^4}{\rho^2\tau},\qquad \text{(de } l,\ r,\ y'),$$

$$(b''\ bis)\qquad d\frac{X}{ds^2}d^2\frac{dx}{ds}+d\frac{Y}{ds^2}\cdot d^2\frac{dy}{ds}+d\frac{Z}{ds^2}\cdot d^2\frac{dz}{ds}=0,\qquad \text{(se déduit de } k\ bis),$$

$$(c'')\qquad Xd^3\frac{dx}{dy}+Yd^3\frac{dy}{ds}+Zd^3\frac{dz}{ds}=ds^2d\frac{ds^3}{\rho^2\tau},\qquad \text{(de } a'' \text{ différentié et de } b''\ bis),$$

$$(d'')\left\{\begin{aligned}&d\frac{dx}{ds}d^2\frac{dy}{ds}d^3\frac{dz}{ds}-d\frac{dx}{ds}d^2\frac{dz}{ds}d^3\frac{dy}{ds}+d\frac{dy}{ds}d^2\frac{dz}{ds}d^3\frac{dx}{ds}-d\frac{dy}{ds}d^2\frac{dx}{ds}d^3\frac{dz}{ds}+d\frac{dz}{ds}d^2\frac{dx}{ds}d^3\frac{dy}{ds}-d\frac{dz}{ds}d^2\frac{dy}{ds}d^3\frac{dx}{ds}\\&=X'_s d^3\frac{dx}{ds}+Y'_s d^3\frac{dy}{ds}+Z'_s d^3\frac{dz}{ds}=\frac{ds^5}{\rho^5}d\frac{\rho}{v}=-\frac{ds^5}{\rho^3\tau^2}d\frac{v}{\rho},\qquad (d''^*),\end{aligned}\right.$$

$$(e'')\qquad dX=\frac{\rho X}{ds^3}d\frac{ds^3}{\rho}-\frac{ds^3}{\tau}d\frac{dx}{ds},\quad dY=\ldots,\quad dZ=\ldots,\qquad (e''^*),$$

(x'^*) Cette formule, analogue à (o), se déduit de (u') et peut encore s'obtenir en remarquant que

$$d\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}=d\frac{\rho}{ds}d\frac{dx}{ds}+\frac{\rho}{ds}d^2\frac{dx}{ds};$$

d'où il suit que le premier membre de (x') développé revient à

$$\left(\frac{ds}{\rho}d\frac{\rho}{ds}+\frac{\rho}{ds}d\frac{ds}{\rho}\right)^2+\frac{\rho^2}{ds^2}\left[\left(d^2\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d^2\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d^2\frac{dz}{ds}\right)^2-\left(d\frac{ds}{\rho}\right)^2\right],$$

expression qui se réduit à $ds^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)$ au moyen de (v'), si l'on fait attention que le premier terme est nul.

(d''^*) Car, en mettant pour X'_s, Y'_s, Z'_s leurs valeurs (l'), on a

$$X'_s d^3\frac{dx}{ds}+Y'_s d^3\frac{dy}{ds}+Z'_s\frac{dz}{ds}=\frac{1}{\rho^3}\left(Xd^3\frac{dx}{ds}+Yd^3\frac{dy}{ds}+Zd^3\frac{dz}{ds}\right)+\frac{ds^3}{\rho^3\tau}\left(\frac{dx}{ds}d^3\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d^3\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}d^3\frac{dz}{ds}\right),$$

ou, d'après (c''), (s'),

$$=\frac{ds^3}{\rho^3}d.\frac{\rho ds^3}{\tau\rho^3}-\frac{ds^3}{\rho^3\tau}\cdot\frac{\rho}{ds}d\frac{ds^3}{\rho^3}=\frac{ds^3}{\rho^3}\frac{ds^3}{\rho^3}d\frac{\rho}{\tau}.$$

(e''^*) Car, d'après (s'), on a $dX\frac{\rho}{ds^3}+Xd\frac{\rho}{ds^3}=-\frac{\rho}{\tau}d\frac{dz}{ds}$; et l'on a $d\frac{\rho}{ds^3}=-\frac{\rho^2}{ds^6}d\frac{ds^3}{\rho}$.

$$(f'')\quad \begin{cases} dX'_s = d\dfrac{dy}{ds}d^3\dfrac{dz}{ds} - d\dfrac{dz}{ds}d^3\dfrac{dy}{ds} = \dfrac{dx}{ds}d\dfrac{ds^3}{\rho^2\tau} + \dfrac{\rho X}{ds^3}d\dfrac{ds^3}{\rho^3} = \dfrac{\rho^3 X'_s}{ds^3}d\dfrac{ds^3}{\rho^3} + \dfrac{dx\,ds^2}{\rho^3}d\dfrac{\rho}{\tau}, \\ dY'_s = \ldots, \quad dZ'_s = \ldots, \end{cases} \qquad (f''^*),$$

$$(g'')\qquad Y'_s\,dZ'_s - Z'_s\,dY'_s = \frac{ds^5}{\rho^5}d\frac{\rho}{\tau}\cdot d\frac{dx}{ds} \text{ (et deux autres équations analogues)}, \qquad (g''^*),$$

$$(h'')\quad d\frac{X'_s}{\sqrt{X'^2_s + Y'^2_s + Z'^2_s}} = d\frac{\rho^2 X'_s}{ds^3\sqrt{\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{\tau^2}}} = -\frac{d\dfrac{\rho}{\tau}}{\rho^2 ds\left(\dfrac{1}{\rho^2}+\dfrac{1}{\tau^2}\right)^{\frac{3}{2}}}d\frac{\rho d\dfrac{dx}{ds}}{ds} \text{ (et deux autres analogues)}, \qquad (h''^*),$$

$$(i'')\quad \left(d\frac{X'_s}{\sqrt{X'^2_s + Y'^2_s + Z'^2_s}}\right)^2 + \left(d\frac{Y'_s}{\sqrt{}}\right)^2 + \left(d\frac{Z'_s}{\sqrt{}}\right)^2 = \left(\frac{\tau^2 d\dfrac{\rho}{\tau}}{\rho^2+\tau^2}\right)^2 = \left(\frac{\rho^2 d\dfrac{\tau}{\rho}}{\rho^2+\tau^2}\right)^2 \text{ (de } h'', x'),$$

$$(j'')\qquad dx - d\frac{\rho^3 X'_s}{ds^2 d\dfrac{\rho}{\tau}} = -\frac{\rho^3 X'_s}{ds^3}d\frac{ds}{d\dfrac{\rho}{\tau}} \text{ (et deux autres analogues)}, \qquad (j''^*),$$

$$(k'')\qquad XdX + YdY + ZdZ = \frac{ds^3}{\rho}d\frac{ds^3}{\rho}, \qquad \text{(de la différentiation de } m),$$

$$(l'')\qquad \frac{ds^2}{\tau^2} = \frac{\rho^2}{ds^6}(dX^2 + dY^2 + dZ^2) - \frac{\rho^4}{ds^{12}}(XdX + YdY + ZdZ)^2, \qquad (l''^*),$$

(f''^*) Car, d'après la valeur (l') de X'_s, on a

$$dX'_s = \frac{dX}{\rho^3} + Xd\frac{1}{\rho^3} + \frac{ds^3}{\rho^3}d\frac{dx}{ds} + \frac{dx}{ds}d\frac{ds^3}{\rho^3\tau};$$

et, d'après la valeur (e'') de dX que l'on vient d'écrire, les trois premiers termes se changent en

$$\frac{X}{\rho ds^3}d\frac{ds^3}{\rho} + Xd\frac{1}{\rho^3} = \frac{\rho X}{ds^3}\left(\frac{1}{\rho^3}d\frac{ds^3}{\rho} + \frac{ds^3}{\rho}d\frac{1}{\rho^3}\right) = \frac{\rho X}{ds^3}d\frac{ds^3}{\rho^3}.$$

(g''^*) Car
$$Y'_s\,dZ'_s - Z'_s\,dY'_s = Y'_s\left(d\frac{dx}{ds}d^3\frac{dy}{ds} - d\frac{dy}{ds}d^3\frac{dx}{ds}\right) - Z'_s\left(d\frac{ds}{ds}d^3\frac{dx}{ds} - d\frac{dz}{ds}d^3\frac{ds}{ds}\right)$$
$$= d\frac{dx}{ds}\left(X'_s\,d^3\frac{dx}{ds} + Y'_s\,d^3\frac{dy}{ds} + Z'_s\,d^3\frac{ds}{ds}\right) - d^3\frac{dx}{ds}\left(X'_s\,d\frac{dx}{ds} + Y'_s\,d\frac{dy}{ds} + Z'_s\,d\frac{dz}{ds}\right),$$

expression dont la seconde partie est nulle et dont la première est égale à $\frac{ds^3}{\rho^3}d\frac{\rho}{\tau}\cdot d\frac{dx}{ds}$, d'après ($d''$).

(h''^*) Cette formule s'obtient, comme on a obtenu (s'), en ayant égard à (m'), (g'') et (r').

(j''^*) Car, d'après (f''), on a

$$dx - d\frac{X'_s}{\dfrac{ds^3}{\rho^3}d\dfrac{\rho}{\tau}} = \frac{\rho^6}{ds^4\left(d\dfrac{\rho}{\tau}\right)^2}\left\{\frac{ds^4\,dx}{\rho^6}\left(d\frac{\rho}{\tau}\right)^2 - \frac{ds^3}{\rho^3}d\frac{\rho}{\tau}\left(\frac{\rho^3 X'_s}{ds^3}d\frac{ds^3}{\rho^3} + \frac{dx\,ds^3}{\rho^3}d\frac{\rho}{\tau}\right) + X'_s\left(d\frac{ds^3}{\rho^3}d\frac{\rho}{\tau} + \frac{ds^3}{\rho^3}d^2\frac{\rho}{\tau}\right)\right\}$$
$$= \frac{\rho^6 X'_s}{ds^4\left(d\dfrac{\rho}{\tau}\right)^2}\left[\left(-\frac{1}{ds}d\frac{ds^3}{\rho^3} + d\frac{ds^3}{\rho^3}\right)d\frac{\rho}{\tau} + \frac{ds^3}{\rho^3}d^2\frac{\rho}{\tau}\right] = \frac{\rho^6 X'_s}{ds^4\left(d\dfrac{\rho}{\tau}\right)^2}\cdot\frac{ds}{\rho^3}\left(-d^2 s\,d\frac{\rho}{\tau} + ds\,d^2\frac{\rho}{\tau}\right) = -\frac{\rho^3 X'_s}{ds^3}d\frac{ds}{d\dfrac{\rho}{\tau}}.$$

(l''^*) Car, d'après (s'), on a

$$-\frac{\rho}{\tau}d\frac{dx}{ds} = \frac{(X^2+Y^2+Z^2)\,dX - X(XdX + YdY + ZdZ)}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ajoutant les trois équations semblables après les avoir élevées au carré, on obtient, eu égard à (m), (o), l'équation (l'').

$$(m'')\qquad dX^2+dY^2+dZ^2=\frac{ds^6}{\rho^2\tau^2}+\left(d\frac{ds^3}{\rho}\right)^2,\qquad \text{(de } l'' \text{ et } k''\text{)},$$

$$(n'')\qquad dX_{,}'^{\,2}+dY_{,}'^{\,2}+dZ_{,}'^{\,2}=\left(d\frac{ds^3}{\rho^2\tau}\right)^2+\left(d\frac{ds^3}{\rho^3}\right)^2,\qquad \text{(résulte de } f''\text{)},$$

$$\left.\begin{array}{ll}(o'')\ d\dfrac{X}{ds^2}=\dfrac{\rho X}{ds^3}d\dfrac{ds}{\rho}-\dfrac{ds}{\tau}d\dfrac{dx}{ds}, & d\dfrac{Y}{ds^2}=\ldots,\quad d\dfrac{Z}{ds^2}=\ldots\\ (p'')\ d\dfrac{X}{ds^3}=-\dfrac{X}{ds^3}\dfrac{d\rho}{\rho}-\dfrac{1}{\tau}d\dfrac{dx}{ds}, & d\dfrac{Y}{ds^3}=\ldots,\quad d\dfrac{Z}{ds^3}=\ldots\end{array}\right\}\text{(se tirent de } s' \text{ comme on en a tiré } e''\text{)},$$

$$(q'')\qquad \left(d\frac{X}{ds^3}\right)^2+\left(d\frac{Y}{ds^3}\right)^2+\left(d\frac{Z}{ds^3}\right)^2=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{ds^2}{\tau^2}+\frac{d\rho^2}{\rho^2}\right)\qquad \text{(résulte de } p'',\ m,\ o,\ q\text{)},$$

$$(r'')\qquad \frac{Y}{ds^3}d\frac{Z}{ds^3}-\frac{Z}{ds^3}d\frac{Y}{ds^3}=\frac{dx}{\rho^2\tau}\ \text{et deux autres analogues},\qquad \text{(de } p'',\ c'\text{)},$$

$$(s'')\qquad \frac{1}{\rho^2}=\frac{\left(\frac{X}{ds^2}\right)^2+\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2}{ds^2-dx^2}=\frac{\left(\frac{Y}{ds^2}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2}{ds^2-dy^2}=\frac{\left(\frac{Z}{ds^2}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}{ds^2-dz^2},\qquad (s''^*),$$

$$(s''\ bis),\ \text{ou}\ \frac{dx^2}{\rho^2}=\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2-\left(\frac{X}{ds^2}\right)^2=\left(\frac{Y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{Z}{ds^2}\right)^2-\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2,\ \text{et deux autres semblables}$$

$$(t'')\qquad -\frac{1}{\rho^2}=\frac{\frac{Y}{ds^2}\frac{Z}{ds^2}+d\frac{dy}{ds}d\frac{dz}{ds}}{dydz}=\frac{\frac{Z}{ds^2}\frac{X}{ds^2}+d\frac{dz}{ds}d\frac{dx}{ds}}{dzdx}=\frac{\frac{X}{ds^2}\frac{Y}{ds^2}+d\frac{dx}{ds}d\frac{dy}{ds}}{dxdy},\qquad (t''^*).$$

Si l'on appelle, en outre,

$\frac{ds}{\mathcal{R}}$ l'*angle de courbure et cambrure composées*, ou l'angle infiniment petit que font les directions des deux rayons de courbure en M et M';

H l'angle que fait, avec la demi-tangente à la courbe en M, menée du côté de M', la droite dite *rectifiante*, perpendiculaire à la fois aux deux rayons de courbure en M et M', et tirée de M, de manière qu'en s'y adossant les pieds au point M, on voie à sa gauche le rayon en M, et à sa droite la parallèle menée par ce point au rayon en M' (*);

L la longueur de cette droite jusqu'à sa rencontre avec la droite analogue relative au point M', ou la distance, au point M, du point correspondant de l'*arête de rebroussement de la surface rectifiante* dont ces droites sont les génératrices;

(s''^*) En effet, d'après (k), on a
$$\left(\frac{X}{ds^2}\right)^2+\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2=\left(\frac{dy}{ds}d\frac{ds}{ds}-\frac{dz}{ds}d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2$$
$$=\frac{ds^2-dx^2-dz^2}{ds^2}\left(d\frac{ds}{ds}\right)^2+\frac{ds^2-dx^2-dy^2}{ds^2}\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\frac{ds^2}{ds^2}\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2-2\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds}d\frac{dy}{ds}d\frac{dz}{ds}$$
$$=\frac{ds^2}{\rho^2}-\frac{dx^2}{ds^2}\left[\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2\right]-\left(\frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds}+\frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds}\right)^2,$$
expression qui, d'après (h), (o), se réduit à $\frac{ds^4}{\rho^2}-\frac{dx^2}{ds^2}\frac{ds^2}{\rho^2}$.

(t''^*) En effet, en développant $YZ+(dsd^2y-dyd^2s)(dsd^2z-dzd^2s)$, et remplaçant dsd^2s par $dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z$, et ds^2 par $dx^2+dy^2+dz^2$, on obtient, en réduisant,
$$-dydz\,(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2)=-dydz\,\frac{ds^4}{\rho^2}.$$

(*) Cette droite est aussi l'axe du cône droit osculateur, en M, à la surface des tangentes de la courbe donnée, et aussi l'arête du cylindre droit dont la base a un rayon $\rho\sin H=\tau\cos H$, sur lequel est enroulée l'*hélice osculatrice* ayant, en M, même tangente, même courbure et même cambrure que la courbe donnée.

R le rayon de la *sphère osculatrice,* dont le centre est à l'intersection des trois plans normaux à la courbe en M, M′, M″.

On a

$$(u'')\qquad \mathfrak{R}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}}}\ \text{(radical positif)},\quad \frac{1}{\mathfrak{R}^2}=\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2},$$

$$(v'')\qquad \operatorname{tang} H=\frac{\tau}{\rho},\quad \sin H=\frac{1}{\rho\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}}}=\frac{\mathfrak{R}}{\rho},\quad \cos H=\frac{1}{\tau\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}}}=\frac{\mathfrak{R}}{\tau},$$

$$(x'')\qquad L=\frac{ds\sin H}{dH}=-\frac{\rho ds}{\mathfrak{R}d\frac{\rho}{\tau}},$$

$$(y'')\qquad R=\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\tau d\rho}{ds}\right)^2}\ \text{(radical positif)}.$$

On a encore :

Pour les cosinus des angles de la rectifiante avec les demi-axes des x, y, z,

$$\frac{\rho^2\mathfrak{R}X'_s}{ds^3}=\frac{\frac{1}{\rho}\frac{\rho X}{ds^3}+\frac{1}{\tau}\frac{dx}{ds}}{1},\qquad \frac{\rho^2\mathfrak{R}Y'_s}{ds^3},\qquad \frac{\rho^2\mathfrak{R}Z'_s}{ds^3};$$

pour la plus courte distance des deux rayons de courbure en M, M′,

$$ds\cos H;$$

pour les distances, au point M et au centre de courbure, du point où le rayon en M passe le plus près du rayon en M′,

$$\rho\frac{\tau^2}{\rho^2+\tau^2}=\rho\sin^2 H\quad\text{et}\quad \rho\frac{\rho^2}{\rho^2+\tau^2}=\rho\cos^2 H;$$

pour la distance des deux centres de courbure en M, M′,

$$\frac{R\,ds}{\tau};$$

pour les coordonnées du centre de la sphère osculatrice en M,

$$x+\rho\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}+\frac{\tau d\rho}{ds}\frac{\rho X}{ds^3}\quad\text{et deux expressions analogues};$$

pour la distance des centres des sphères osculatrices en M, M′,

$$\frac{\rho}{\tau}ds+d.\frac{\tau d\rho}{ds}=ds.\frac{R\,dR}{\tau d\rho}.$$

Ces expressions sont démontrées au Mémoire de deux manières, analytiquement et géométriquement.

3 2044 074 429 127

3 2044 074 429 127